分数変換による近接根の分離について(数式処理における理論とその応用の研究)

小林, 英恒; 鈴木, 秀男

数理解析研究所講究録
920 巻 1995 年 202-215

23.

分数変換による近接根の分離について

小林 英恒
(日本大学理工・数学)
鈴木 秀男
(東京職業能力開発短大・情報処理)

23.1 序論

我々は、これまで連立代数方程式の交点での重複度を数値計算によって求めることを研究してきた[1)]。その方法は Zeuthen の法則より導かれ、簡単に言うと、問題の根の十分近くを超平面で切断して新たな連立代数方程式を作りこの新たな方程式の根を数値計算により求めることにより、元の根の重複度を計算するものである。その特徴としては、

- 全ての根をあらかじめ求める必要はない
- 与えられた点の近傍のみ考えればよい
- 簡単な比の計算で重複度が求まる

が挙げられる。さらに、我々はいくつかの改良を加えた。特に、数値計算により真の重複度を挟む方法を考案し、成功している[2)]。また数値計算を行なう上で現われる未知定数の影響を除去するための方法も考案した。

数値的に未知定数の影響を除去することにより、ある程度分離性を保ちつつ重複度を計算することができる。しかし、もし重複はしていないが非常に近接した根が現われると、その根を分離できなければもとの 根の重複度が求まらない。

そこで、我々は、1次分数変換を利用し、一変数及び二変数の代数方程式について実際的な近接根の分離の方法と計算の例を報告した[3)]。一般の多変数連立代数方程式の近接根も分離が可能であるこ

とを注意しておく。

また、この方法を使用することにより、数値計算によって近接根の近似解のみを根とする、新たなしかも低次の方程式を導くこともできる。このような操作を擬局所化と呼ぶ。

この報告では、一次分数変換の具体的な形を4つ取り上げ、その性質について述べる。

23.2 一次分数変換

一変数代数方程式 $f(x)=0$ の根に付いて考えることとする。まず、この方程式を分数変換によって変換する。そのために、斉次座標 (X,Y) を導入し多項式 $f(x)$ の斉次化

$$F(X,Y)=Y^{\deg f}f(X/Y) \tag{1}$$

を作る。次に、正則な射影変換

$$\begin{cases} U &= aX+bY \\ V &= cX+dY \end{cases} \tag{2}$$

によって得られる新しい式を $G(U,V)$ とする。つまり、

$$\begin{cases} X &= a'U+b'V \\ Y &= c'U+d'V \end{cases} \tag{3}$$

を上の射影変換の逆変換とすると

$$G(U,V)=F(a'U+b'V,\ c'U+d'V) \tag{4}$$

である。射影変換をうまく選んで点 $V=0$ は元の方程式 $f(x)=0$ の根でないようにとって、この点 $V=0$ を新たな無限遠点とするとき有限部分での方程式

$$G(u,1)=0 \text{ ただし } u=U/V \tag{5}$$

の根が元の方程式 $f(x)=0$ の根と重複度も含めて一対一に対応する。

23.3 近接根の分離

いま、複素根についても同様な議論が成り立つのであるが、簡単のために $f(x)$ の根は全て実数と

しそれらを $\alpha_1,\ldots,\alpha_r,\beta_1,\ldots,\beta_s$ $(r+s=n)$ とする。

$$f(x) = \prod_{i=1}^{r}(x-\alpha_i)\prod_{j=1}^{s}(x-\beta_j) \quad r+s=n \tag{6}$$

において$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$を近接根とし、$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$をそれら近接根からある程度離れている根とする。すなわち近接根は、あるαを適当に与えたとき全て区間

$$(\alpha-\epsilon,\alpha+\epsilon) \tag{7}$$

に属するとする。ここで$\epsilon>0$は十分小さな数とする。

さて、分数変換 $u=\dfrac{ax-b}{cx-d}$ は x に付いて解くことができる。すなわち、

$$x=\frac{ud-b}{uc-a} \tag{8}$$

これを $f(x)$ に代入し、整理すると次のようになる。

$$\left(\frac{1}{uc-a}\right)^n\prod_{i=1}^{r}(d-\alpha_i c)\prod_{i=1}^{r}\left(u-\frac{b-\alpha_i a}{d-\alpha_i c}\right)\times\prod_{j=1}^{s}(d-\beta_j c)\prod_{j=1}^{s}\left(u-\frac{b-\beta_j a}{d-\beta_j c}\right) \tag{9}$$

ここで、得られた式の分子に最高次の係数の逆数を掛けた式を $h(u)$ とおく。つまり

$$h(u) = \prod_{i=1}^{r}\left(u-\frac{b-\alpha_i a}{d-\alpha_i c}\right)\times\prod_{j=1}^{s}\left(u-\frac{b-\beta_j a}{d-\beta_j c}\right) \tag{10}$$

この新しい式は数式処理言語を用いれば必要な精度まで簡単に求められること、この式の係数は元の方程式の係数とほぼ同じ程度の大きさにできることを注意しておく。

するとその近接根に対応する根は $i=1,\ldots,r$ に対して$\frac{b-\alpha_i a}{d-\alpha_i c}$ となり、近接根と関係ない方の根 $j=1,\ldots,s$ に対しては$\frac{b-\beta_j a}{d-\beta_j c}$ となる。

また分数変換による誤差については、$h(u)=0$ の近似解を u_i、それに対する厳密解を$\tilde{u}_i$と置き、$\tilde{u}_i$ に対応する $f(x)=0$ の厳密解を$\tilde{x}_i$とする。このとき

$$\Delta u_i = u_i-\tilde{u}_i \quad , \quad \Delta x_i = x_i-\tilde{x}_i \tag{11}$$

とおくと、次の関係が成り立つ。

$$\Delta x_i = x_i-\tilde{x}_i = \frac{ad-bc}{(\tilde{u}_i c-a)(u_i c-a)}\Delta u_i \tag{12}$$

ここで我々は、a,b,c,d の具体的な値として次の 4 種類の分数変換φ を提案する。

23.3.1 元の方程式の近似解を必要としない場合

1. $a=1,b=\alpha,c=1,d=\alpha-\gamma$ $(\gamma=k\epsilon,k\geq 1)$

このとき分数変換の対応と具体的な分数変換の型は次のようになる。

$$\varphi(\infty)=1,\varphi(\alpha)=0,\varphi(\alpha-\gamma)=\infty \tag{13}$$

$$u=\varphi(x)=\frac{x-\alpha}{x-\alpha+\gamma} \tag{14}$$

$$x=\varphi^{-1}(u)=\frac{(\alpha-\gamma)u-\alpha}{u-1} \tag{15}$$

また近接根に対応する根と、近接根と関係ないほうの根はそれぞれ

$$\frac{c_i}{c_i+k} \quad (c_i\epsilon=\alpha_i-\alpha,|c_i|<1) \qquad i=1,\cdots,r \tag{16}$$

$$\frac{\beta_j-\alpha}{\beta_j-\alpha+\gamma} \qquad j=1,\cdots,s \tag{17}$$

となる。さらに近接根の区間 $(\alpha-\epsilon,\alpha+\epsilon)$ は、$(\frac{-1}{k-1},\frac{1}{k+1})$ へと拡大される。

2. $a=0,b=\gamma,c=1,d=\alpha-\gamma$ $(\gamma=k\epsilon,k\geq 1)$

このとき分数変換の対応と具体的な分数変換の型は次のようになる。

$$\varphi(\infty)=0,\varphi(\alpha)=-1,\varphi(\alpha-\gamma)=\infty \tag{18}$$

$$u=\varphi(x)=\frac{-\gamma}{x-\alpha+\gamma} \tag{19}$$

$$x=\varphi^{-1}(u)=\frac{(\alpha-\gamma)u-\gamma}{u} \tag{20}$$

また近接根に対応する根と、近接根と関係ないほうの根はそれぞれ

$$\frac{-k}{k+c_i} \quad (c_i\epsilon=\alpha_i-\alpha,|c_i|<1) \qquad i=1,\cdots,r \tag{21}$$

$$\frac{-\gamma}{\beta_j-\alpha+\gamma} \qquad j=1,\cdots,s \tag{22}$$

となる。さらに近接根の区間 $(\alpha-\epsilon,\alpha+\epsilon)$ は、$(-1-\frac{1}{k-1},-1+\frac{1}{k+1})$ へと拡大される。

23.3.2 元の方程式の近似解を必要とする場合

3. $a=\beta_l-\alpha+\gamma,b=(\beta_l-\alpha+\gamma)\alpha,c=\beta_l-\alpha,d=(\beta_l-\alpha)(\alpha-\gamma)$ $(\gamma=k\epsilon,k\geq 1,|\alpha-\beta_l|>|\alpha-\beta_j|)$

このとき分数変換の対応と具体的な分数変換の型は次のようになる。

$$\varphi(\beta_l)=1,\varphi(\alpha)=0,\varphi(\alpha-\gamma)=\infty \tag{23}$$

$$u=\varphi(x)=\frac{(\beta_l-\alpha+\gamma)(x-\alpha)}{(\beta_l-\alpha)(x-\alpha+\gamma} \tag{24}$$

$$x=\varphi^{-1}(u)=\frac{(\beta_l-\alpha)(\alpha-\gamma)u-\alpha(\beta_l-\alpha+\gamma)}{(\beta_l-\alpha)(u-1)-\gamma} \tag{25}$$

また近接根に対応する根と、近接根と関係ないほうの根はそれぞれ

$$\frac{(\beta_l-\alpha+\gamma)c_i}{(\beta_l-\alpha)(c_i+k)}, \quad (c_i\epsilon=\alpha_i-\alpha,|c_i|<1) \qquad i=1,\cdots,r \tag{26}$$

$$1\ (j=l)\ ,\ \frac{(\beta_l-\alpha+\gamma)(\beta_j-\alpha)}{(\beta_l-\alpha)(\beta_l-\alpha+\gamma)}\ (j\neq l) \qquad j=1,\cdots,s \tag{27}$$

となる。さらに近接根の区間 $(\alpha-\epsilon,\alpha+\epsilon)$ は、$(\frac{-(\beta_l-\alpha+\gamma)}{(\beta_l-\alpha)(k-1)},\frac{\beta_l-\alpha+\gamma}{(\beta_l-\alpha)(k+1)})$ へと拡大される。

4. $a=\gamma, b=\beta_l\gamma, c=\beta_l-\alpha, d=(\beta_l-\alpha)(\alpha-\gamma)\ (\gamma=k\epsilon, k\geq 1, |\alpha-\beta_l|>|\alpha-\beta_j|)$

このとき分数変換の対応と具体的な分数変換の型は次のようになる。

$$\varphi(\beta_l)=0,\varphi(\alpha)=-1,\varphi(\alpha-\gamma)=\infty \tag{28}$$

$$u=\varphi(x)=\frac{(x-\beta_l)\gamma}{(\beta_l-\alpha)(x-\alpha+\gamma)} \tag{29}$$

$$x=\varphi^{-1}(u)=\frac{(\beta_l-\alpha)(\alpha-\gamma)u-\beta_l\gamma}{(\beta_l-\alpha)u-\gamma} \tag{30}$$

また近接根に対応する根と、近接根と関係ないほうの根はそれぞれ

$$\frac{-(\beta_l-\alpha_i-c_i\epsilon)k}{(\beta_l-\alpha)(k+c_i)}\ ,\ (c_i\epsilon=\alpha_i-\alpha, |c_i|<1) \qquad i=1,\cdots,r \tag{31}$$

$$0\ (j=l)\ ,\ \frac{(\beta_j-\beta_l)\gamma}{(\beta_l-\alpha)(\beta_j-\alpha+\gamma)}\ (j\neq l) \qquad j=1,\cdots,s \tag{32}$$

となる。また近接根の区間 $(\alpha-\epsilon,\alpha+\epsilon)$ は、$(-1-\frac{\beta_l-\alpha+\gamma}{(\beta_l-\alpha)(k-1)},-1+\frac{\beta_l-\alpha+\gamma}{(\beta_l-\alpha)(k+1)})$ へと拡大される。

23.3.3 分数変換における誤差

このとき元の方程式の近接根に対応する根は、変換 1, 3 においては 0 を中心に拡大され、変換 2, 4 においては -1 を中心に拡大されることが分かる。したがって、kの値を（10 から 1000 程度の）適当に大きすぎない値に取っておけば変換後の方程式では根と根の間隔が元のそれと比較して大幅に拡大される。

次にこれら 4 つの分数変換における誤差について述べる。近似解の有無に関係なく以下の命題が成り立つ。

命題 23.3.1 $h(u)=0$ の近似解を u_i、それに対する厳密解を $\tilde{u}_i$ と置き、$\tilde{u}_i$ に対応する $f(x)=0$ の厳密解を $\tilde{x}_i$ とする。このとき

$$\Delta u_i=u_i-\tilde{u}_i \quad , \quad \Delta x_i=x_i-\tilde{x}_i \tag{33}$$

とおくと、次の関係が成り立つ。

$$|\Delta x_i| \fallingdotseq \gamma|\Delta u_i| \tag{34}$$

[証明]

(12) 式において、それぞれの変換に対応する a,b,c,d を代入すれば

$$
\begin{aligned}
\text{変換 1} &\quad : \quad \Delta x_i = x_i - \tilde{x}_i = \frac{1}{(\tilde{u}_i - 1)(u_i - 1)}\gamma\Delta u_i \\
\text{変換 2} &\quad : \quad \Delta x_i = x_i - \tilde{x}_i = \frac{1}{u_i\tilde{u}_i}\gamma\Delta u_i \\
\text{変換 3} &\quad : \quad \Delta x_i = x_i - \tilde{x}_i = \frac{-(\beta_l - \alpha + \gamma)(\beta_l - \alpha)\gamma}{\{(\beta_l - \alpha)(\tilde{u}_i - 1) - \gamma\}\{(\beta_l - \alpha)(u_i - 1) - \gamma\}}\Delta u_i \\
\text{変換 4} &\quad : \quad \Delta x_i = x_i - \tilde{x}_i = \frac{(\beta_l - \alpha)(\alpha - \gamma - \beta_l)}{\{(\beta_l - \alpha)u_i - \gamma\}\{(\beta_l - \alpha)\tilde{u}_i - \gamma\}}\gamma\Delta u_i
\end{aligned}
$$

を得る。ここで$\gamma = k\epsilon \ll 1$であり、$|u_i|, |\tilde{u}_i| \ll 1$(変換１，３), $u_i, \tilde{u}_i \fallingdotseq -1$(変換２，４）であるから上式はそれぞれ

$$
\begin{aligned}
\text{変換 1} &\quad : \quad \Delta x_i = \frac{1}{(\tilde{u}_i - 1)(u_i - 1)}\gamma\Delta u_i \fallingdotseq \gamma\Delta u_i \\
\text{変換 2} &\quad : \quad \Delta x_i = \frac{1}{u_i\tilde{u}_i}\gamma\Delta u_i \fallingdotseq \gamma\Delta u_i \\
\text{変換 3} &\quad : \quad \Delta x_i \fallingdotseq \frac{-(\beta_l - \alpha + \gamma)(\beta_l - \alpha)\gamma}{(\beta_l - \alpha + \gamma)^2}\Delta u_i \fallingdotseq -\gamma\Delta u_i \\
\text{変換 4} &\quad : \quad \Delta x_i \fallingdotseq \frac{(\beta_l - \alpha)(\beta_l - \alpha)}{(\beta_l - \alpha)^2}\gamma\Delta u_i \fallingdotseq \gamma\Delta u_i
\end{aligned}
$$

となり

$$|\Delta x_i| \fallingdotseq \gamma|\Delta u_i| \tag{35}$$

を得る。□

この命題より次のことが分かる。

４つの分数変換の型いずれにおいても分数変換における誤差は$\Delta x_i \fallingdotseq \gamma\Delta u_i$という形をしている。これより変換された空間で誤差$\Delta u_i$を含んでいた近似解$u_i$をもとの空間へ戻したときに厳密解$x_i$からのずれは$\Delta u_i$の$\gamma$倍になることがわかる。一般に$\gamma$は小さい数なので、この逆変換によりもとの問題の厳密解に対する誤差は、変換された空間での誤差よりもγ倍小さくなる。言い換えると、ϵが小さくなるほど（数値計算では分離が困難になるほど）、分数変換による誤差が減少し、分数変換が有効になることが分かる。

23.4 擬局所化

擬局所化というのは、数値計算によって近接根の近似根のみを根とする方程式を構成する方法である。ここでは一群の近接根からは他の根はある程度離れていることを仮定する。また、近接根以外の根はある程度正確に求められていることも仮定する。

このような擬局所化を繰り返して適用すればより低次の方程式が得られることになる。

ここでは、前章で取り上げた４つの分数変換について考える。

23.4.1 元の方程式の近似解を必要としない場合

1. $a=1, b=\alpha, c=1, d=\alpha-\gamma, (\gamma=k\epsilon, k\geq 1)$

この場合近接根は0付近で拡大され、それ以外の根は近接根から離れるほど1へ近づく。なぜならば、元の方程式の近接根に対応しない根は

$$\frac{\alpha-\beta_j}{\alpha-\beta_j-\gamma} = \frac{1}{1-\frac{\gamma}{\alpha-\beta_j}} = \frac{1}{1-\frac{k\epsilon}{\alpha-\beta_j}} \tag{36}$$

であった。β_jは近接根から十分離れているので、kの値を10から1000程度にとっても $|k\epsilon/(\alpha-\beta_j)| << 1$ と取れる。したがって上式は

$$1+\frac{k\epsilon}{\alpha-\beta}+(\frac{k\epsilon}{\alpha-\beta})^2+\cdots \tag{37}$$

と展開でき、1に近い値となることが分かる。

このとき変換された式 $h(u)$ から形式的に $u-1$ を取り除くことにより、低次の新しい方程式を得る。すなわち

$$h(u) = g_1(u)(u-1)+h(1) \tag{38}$$

となる $g_1(u)$ を計算することにより擬局所化が行なえる。具体的には、組立除法等により計算すればよい。

2. $a=0, b=\gamma, c=1, d=\alpha-\gamma, (\gamma=k\epsilon, k\geq 1)$

この場合近接根は-1付近で拡大され、それ以外の根は近接根から離れるほど0へ近づく。なぜならば、元の方程式の近接根に対応しない根は

$$\frac{\gamma}{\beta_j-\alpha+\gamma} = \frac{k\epsilon}{\beta_j-\alpha+k\epsilon} \tag{39}$$

であった。β_jは近接根から十分離れているので、kの値を10から1000程度にとっても $|k\epsilon/(\beta_j-\alpha+k\epsilon)| \fallingdotseq 0$ と取れる。

このとき変換された式 $h(u)$ から形式的に u を取り除くことにより、低次の新しい方程式を得る。すなわち

$$h(u) = g_1(u)u+h(0) \tag{40}$$

となる $g_1(u)$ を計算することにより擬局所化が行なえる。具体的には、u によるくくりだし等により計算すればよい。

23.4.2 元の方程式の近似解を必要とする場合

分数変換に利用する近似解は任意に取れるが、ここでは絶対値最大の根を採用する。

3. $a=\beta_l-\alpha+\gamma, b=(\beta_l-\alpha+\gamma)\alpha, c=\beta_l-\alpha, d=(\beta_l-\alpha)(\alpha-\gamma), (\gamma=k\epsilon, k\geq 1, |\alpha-\beta_l| > |\alpha-\beta_j|)$

この場合近接根は0付近で拡大され、それ以外の根の内ある特定の根がちょうど1になる。

このとき変換された式 $h(u)$ から形式的に $u-1$ を取り除くことにより、低次の新しい方程式を得る。すなわち

$$h(u) \quad = \quad g_1(u)(u-1) \tag{41}$$

となる $g_1(u)$ を計算することにより擬局所化が行なえる。具体的には、組立除法等により計算すればよい。

4. $a=\gamma, b=\beta_l\gamma, c=\beta_l-\alpha, d=(\beta_l-\alpha)(\alpha-\gamma), (\gamma=k\epsilon, k\geq 1, |\alpha-\beta_l|>|\alpha-\beta_j|)$

この場合近接根は1付近で拡大され、それ以外の根の内ある特定の根がちょうど0になる。

このとき変換された式 $h(u)$ から形式的に u を取り除くことにより、低次の新しい方程式を得る。すなわち

$$h(u) \quad = \quad g_1(u)u \tag{42}$$

となる $g_1(u)$ を計算することにより擬局所化が行なえる。具体的には、u によるくくりだし等により計算すればよい。

23.4.3 擬局所化による誤差

変換1, 2は全く近似解を使用せずに擬局所化を行ない、変換3, 4は近接根以外の近似解を使用して擬局所化を行なっている。したがって、擬局所化の誤差については、変換1, 2と変換3, 4の2つに分けて考える必要がある。このとき変換1, 2の擬局所化による誤差は、次のように与えられる。ただし分数変換により得られた方程式を

$$h(u) \quad = \quad \prod_{i=1}^{r}(u-\tilde{\alpha}_i)\prod_{j=1}^{s}(u-\tilde{\beta}_j) \tag{43}$$

とする。ここに $\tilde{\alpha}_i=\varphi(\alpha_i), \tilde{\beta}_j=\varphi(\beta_j)$ である。

命題 23.4.1 $h(u)=0$ の近接根に対応する根の1つを $\tilde{\alpha}_{i0}$ とする。$\tilde{\alpha}_{i0}$ に対応する $g_1(u)=0$ の根を $\tilde{\alpha}_{i0}+\Delta\tilde{\alpha}_{i0}$ とすれば

$$|\Delta\tilde{\alpha}_{i0}| \quad \fallingdotseq \quad \left|\frac{k(c_{i0}+k)^{n-2}}{-\prod_{i\neq i0, i=1}^{r}(c_{i0}-c_i)\prod_{j=1}^{s}(\alpha+c_{i0}\epsilon-\beta_j)+(c_{i0}+k)^{n-1}\epsilon^s}\right|\epsilon^s \tag{44}$$

が成り立つ。ここで $c_i\epsilon=\alpha_i-\alpha, c_{i0}\epsilon=\alpha_{i0}-\alpha$ とする。

とくに ϵ が十分小さいことより $\alpha+c_{i0}\epsilon-\beta_j=\alpha-\beta_j$ とすると次を得る。

$$|\Delta\tilde{\alpha}_{i0}| \quad = \quad \left|\frac{k(c_{i0}+k)^{n-2}}{\prod_{i\neq i0, i=1}^{r}(c_{i0}-c_i)\prod_{j=1}^{s}(\alpha-\beta_j)}\right|\epsilon^s \tag{45}$$

[証明]

ここでは、変換1における証明を与えておく。変換2においても同様である。

$$h'(u) = \sum_{l=1}^{r}\prod_{i\neq l,i=1}^{r}(u-\tilde{\alpha}_i)\prod_{j=1}^{s}(u-\tilde{\beta}_j)+\prod_{i=1}^{r}(u-\tilde{\alpha}_i)\sum_{l=1}^{s}\prod_{j\neq l,j=1}^{s}(u-\tilde{\beta}_j) \qquad (46)$$

であるから

$$\begin{aligned} h(1) &= \prod_{i=1}^{r}(1-\tilde{\alpha}_i)\prod_{j=1}^{s}(1-\tilde{\beta}_j) \\ &= \prod_{i=1}^{r}\left(\frac{1}{\alpha_i-\alpha+\gamma}\right)\prod_{j=1}^{s}\left(\frac{1}{\beta_j-\alpha+\gamma}\right)\times\gamma^n \qquad (47) \\ h'(\tilde{\alpha}_{i0}) &= \prod_{i\neq i0,i=1}^{r}(\tilde{\alpha}_{i0}-\tilde{\alpha}_i)\prod_{j=1}^{s}(\tilde{\alpha}_{i0}-\tilde{\beta}_j) \\ &= \frac{1}{(\alpha_{i0}-\alpha+\gamma)^{n-1}}\prod_{i\neq i0,i=1}^{r}\frac{\alpha_{i0}-\alpha_i}{\alpha_i-\alpha+\gamma}\prod_{j=1}^{s}\frac{\alpha_{i0}-\beta_j}{\beta_j-\alpha+\gamma}\times\gamma^{n-1} \qquad (48) \end{aligned}$$

を得る。また $g_1(u)=\dfrac{h(u)-h(1)}{u-1}$ であるから $h(\tilde{\alpha}_{i0})=0$ に注意して

$$\begin{aligned} g_1(\tilde{\alpha}_{i0}) &= \frac{-h(1)}{\tilde{\alpha}_{i0}-1} \qquad (49) \\ g_1'(\tilde{\alpha}_{i0}) &= \frac{h'(\tilde{\alpha}_{i0})(\tilde{\alpha}_{i0}-1)+h(1)}{(\tilde{\alpha}_{i0}-1)^2} \qquad (50) \end{aligned}$$

を得る。一方 $g_1(u)$ は

$$g_1(\tilde{\alpha}_{i0}+\Delta\tilde{\alpha}_{i0}) = g_1(\tilde{\alpha}_{i0})+g_1'(\tilde{\alpha}_{i0})\Delta\tilde{\alpha}_{i0}+\cdots=0 \qquad (51)$$

と展開できるから、$\Delta\tilde{\alpha}_{i0}$が十分小さく、2次以降の項を無視すると$\Delta\tilde{\alpha}_{i0}$が求められる。

$$\begin{aligned} \Delta\tilde{\alpha}_{i0} &= -\frac{g_1(\tilde{\alpha}_{i0})}{g_1'(\tilde{\alpha}_{i0})} \\ &\fallingdotseq \frac{k(c_{i0}+k)^{n-2}}{-\prod_{i\neq i0,i=1}^{r}(c_{i0}-c_i)\prod_{j=1}^{s}(\alpha+c_{i0}\epsilon-\beta_j)+(c_{i0}+k)^{n-1}\epsilon^s}\epsilon^s \qquad (52) \end{aligned}$$

一方変換3，4の擬局所化による誤差は、分数変換に用いたβ_lが少しずれたときの影響を調べればよい。これは次のように与えられる。

命題 23.4.2 $h(u)=0$ の近接根に対応する根の1つを$\tilde{\alpha}_{i0}$とする。$\tilde{\alpha}_{i0}$に対応する $g_1(u)=0$ の根を$\tilde{\alpha}_{i0}+\Delta\tilde{\alpha}_{i0}$とすれば

$$|\Delta\tilde{\alpha}_{i0}| \fallingdotseq \left|\frac{L_1k(c_{i0}+k)^{n-2}}{L_2[L_3\prod_{i\neq i0,i=1}^{r}(\frac{c_{i0}-c_i}{\alpha_i-e\beta_l})\prod_{j=1}^{s}(\frac{\alpha+c_{i0}\epsilon-\beta_j}{\beta_j-e\beta_l})+(c_{i0}+k)^{n-1}\epsilon^s]}\right|\epsilon^s \qquad (53)$$

が成り立つ。ここで $c_i\epsilon=\alpha_i-\alpha, c_{i0}\epsilon=\alpha_{i0}-\alpha, \beta_l+\Delta\beta_l=e\beta_l, L_1=e\beta_l-\alpha-c_{i0}\epsilon, L_2=\alpha-e\beta_l, L_3=-(\alpha-e\beta_l-k\epsilon)^{n-1}$である。

とくにϵが十分小さいことより$\alpha + c_0\epsilon - \beta_j = \alpha - \beta_j$とすると次を得る。

$$|\Delta\tilde{\alpha}_{i0}| \ \fallingdotseq \ 2^{s-1}|\frac{(1-e)\beta_l}{\alpha - e\beta_l}||\frac{(c_{i0}+k)^{n-2}k}{\prod_{i\neq i0,i=1}^{r}(c_{i0}-c_i)\prod_{j=1}^{s}(\alpha-\beta_j)}|\epsilon^s \tag{54}$$

[証明]

ここでは、変換3における証明の手順を与えておく。変換4においても同様である。この場合 $c_i\epsilon = \alpha_i - \alpha, \gamma = k\epsilon, \beta_l + \Delta\beta_l = e\beta_l$とすれば

$$\begin{aligned} h(1) &= \prod_{i=1}^{r}(1-\tilde{\alpha}_i)\prod_{j=1}^{s}(1-\tilde{\beta}_j) \\ &= \frac{1}{(\alpha - e\beta_l)^n}\prod_{i=1}^{r}(\frac{\alpha_i - e\beta_l}{c_i + k})\prod_{j=1}^{s}(\frac{\beta_j - e\beta_l}{\beta_j - \alpha + k\epsilon})k^n\epsilon^s \end{aligned} \tag{55}$$

$$\begin{aligned} h'(\tilde{\alpha}_{i0}) &= \prod_{i\neq i0,i=1}^{r}(\tilde{\alpha}_{i0}-\tilde{\alpha}_i)\prod_{j=1}^{s}(\tilde{\alpha}_{i0}-\tilde{\beta}_j) \\ &= \frac{(\alpha - e\beta_l - \gamma)^{n-1}}{(\alpha - e\beta_l)^{n-1}(c_{i0}+k)^{n-1}}\prod_{i\neq i0,i=1}^{r}(\frac{c_{i0}-c_i}{c_i+k})\prod_{j=1}^{s}(\frac{\alpha_{i0}-\beta_j}{\beta_j-\alpha+\gamma})k^{n-1} \end{aligned} \tag{56}$$

を得る。したがって、前命題と同様の計算により示すことができる。

23.5 数値例

例 1. 元の方程式を

$$\begin{aligned} f(x) &= \prod_{i=-3,i\neq 0}^{5}(x+\frac{i}{100000000})(x-1001)(x-10001)(x+5001)(x+50001) \\ &= x^{12} + 44000.00000009x^{11} - 3.4506600199604\times 10^{8}x^{10} - 2.200480044031056\times 10^{12}x^{9} \\ &\quad +2503300864867958.0x^{8} + 2.252970778546198\times 10^{8}x^{7} + 1.501980519316861x^{6} \\ &\quad -0.000000315415908993233x^{5} - 5.782624998399503\times 10^{-15}x^{4} \\ &\quad +1.103955681473334\times 10^{-22}x^{3} + 2.363116016629434\times 10^{-30}x^{2} \\ &\quad -8.110694802655409\times 10^{-39}x - 1.802376622847521\times 10^{-46} \end{aligned} \tag{57}$$

とする。この式に分数変換 (変換 1) を適用すると

$$\begin{aligned} h(u) &= u^{12} - 2.031995781907879u^{11} - 0.8316267067174223u^{10} + 3.611350069519585u^{9} \\ &\quad -0.6062301894098922u^{8} - 1.942094941994601u^{7} + 0.5061142560438811u^{6} \\ &\quad +0.3826821326562467u^{5} - 0.07141007140231846u^{4} - 0.02014960348146103u^{3} \\ &\quad +0.003180461513499419u^{2} + 0.0002081252081093526u - 0.000002775002774758844 \end{aligned}$$

となる。一方近似解が$-50000, 10000, -5000, 1000$ と得られている場合には、これらを利用し分数変換 (変換 3) を適用する。このとき分数変換された式は

$$\begin{aligned} h(u) \;=\;& u^{12} - 2.031995781903815u^{11} - 0.8316267067140958u^{10} + 3.611350069497917u^{9} \\ & -0.6062301894050423u^{8} - 1.94209494197518u^{7} + 0.5061142560378077u^{6} \\ & +0.3826821326508891u^{5} - 0.07141007140117589u^{4} - 0.02014960348109834u^{3} \\ & +0.003180461513435 81u^{2} + 0.0002081252081047738u - 0.000027750027746922 43 \end{aligned}$$

となる。これらの式を数値計算で解き、その解を数式処理で逆分数変換すると次のようになる。ただし、虚部は $10^{-25} \sim 10^{-30}$程度でほぼ0と見なせるので省略した。

No.	変換 1	変換 3
1	-.5000000000000000e-7	-.5000000000000001e-7
2	-.4000000000000000e-7	-.4000000000000000e-7
3	-.3000000000000001e-7	-.3000000000000000e-7
4	-.2000000000000000e-7	-.2000000000000001e-7
5	-.9999999999999999e-8	-.1000000000000000e-7
6	0.1000000000000000e-7	0.9999999999999999e-8
7	0.2000000000000002e-7	0.2000000000000001e-7
8	0.3000000000000002e-7	0.3000000000000001e-7

次にこの式 $h(u)$ に擬局所化 (変換 1) を適用する。i 回擬局所化を適用した式を $g_i(u)$ とすれば

$$\begin{aligned} g_1(u) \;=\;& u^{11} - 1.031995781907879u^{10} - 1.863622488625301u^{9} + 1.747727580894284u^{8} \\ & +1.141497391484391u^{7} - 0.8005975505102094u^{6} - 0.2944832944663284u^{5} \\ & +0.0881988381899183u^{4} + 0.01678876678759985u^{3} - 0.003360836693861183u^{2} \\ & -0.0001803751803617641u + 0.00002775002774758844 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_3(u) \;=\;& u^{9} + 0.9680042180921211u^{8} - 0.9276140524410589u^{7} - 1.075504742079955u^{6} \\ & -0.08189804023446025u^{5} + 0.1111111111008253u^{4} + 0.009636967969782543u^{3} \\ & -0.003638336971341946u^{2} - 0.0001248751248665873u + 0.00002775002774758843 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_4(u) \;=\;& u^{8} + 1.968004218092121u^{7} + 1.040390165651062u^{6} - 0.035114576428893u^{5} \\ & -0.1170126166633532u^{4} - 0.005901505562527 91u^{3} + 0.003735462407254633u^{2} \\ & +0.00009712543591268656u - 0.00002774968895390072 \end{aligned}$$

を得る。同様にして、擬局所化 (変換 3) を適用すれば

$$g_1(u) \;=\; u^{11} - 1.031995781903815u^{10} - 1.863622488617911u^{9} + 1.747727580880006u^{8}$$

$$+1.141497391474964u^7 - 0.8005975505002163u^6 - 0.2944832944624086u^5$$
$$+0.08819883818848057u^4 + 0.01678876678730468u^3 - 0.003360836693793661u^2$$
$$-0.0001803751803578514u + 0.00002775002774692243$$
$$g_3(u) = u^9 + 0.9680042180847611u^8 - 0.9276140523803383u^7 - 1.07550474200294u^6$$
$$-0.08189804022832978u^5 + 0.1111111110883101u^4 + 0.009636967968555289u^3$$
$$-0.003638336970787753u^2 - 0.0001248751248454418u + 0.00002775002774226043$$
$$g_4(u) = u^8 + 1.968004218200922u^7 + 1.040390165597956u^6 - 0.03511457679216608u^5$$
$$-0.1170126170598069u^4 - 0.005901505904830176u^3 + 0.003735462070663 73u^2$$
$$+0.00009712509681977337u - 0.0000277500281455485$$

となる。これらの式を数値計算で解き、その解を数式処理で逆分数変換すると次のようになる。ただし、虚部は 10^{-35} 程度でほぼ0と見なせるので省略した。

変換1			
No.	$g_1(u)$	$g_3(u)$	$g_4(u)$
1	-.5000000000000000e-7	-.5000000000000000e-7	-.4999999997870959e-7
2	-.3999999999999997e-7	-.3999999999999995e-7	-.4000000070306422e-7
3	-.3000000000000003e-7	-.3000000000000002e-7	-.2999999260997139e-7
4	-.2000000000000000e-7	-.2000000000000001e-7	-.2000003277255018e-7
5	-.9999999999999999e-8	-.9999999999999999e-8	-.9999940875907692e-8
6	0.1000000000000001e-7	0.9999999999999996e-8	0.9999856063601379e-8
7	0.1999999999999999e-7	0.2000000000000000e-7	0.2000017998336977e-7
8	0.3000000000000001e-7	0.2999999999999999e-7	0.2999993064138946e-7
誤差	10^{-35}	10^{-21}	10^{-14}

変換3			
No.	$g_1(u)$	$g_3(u)$	$g_4(u)$
1	-.5000000000000000e-7	-.5000000000000004e-7	-.500000000000235e-7
2	-.4000000000000001e-7	-.3999999999999988e-7	-.3999999999922522e-7
3	-.3000000000000000e-7	-.3000000000000008e-7	-.3000000000814309e-7
4	-.2000000000000001e-7	-.1999999999999998e-7	-.1999999996388769e-7
5	-.1000000000000000e-7	-.1000000000000000e-7	-.1000000006514906e-7
6	0.9999999999999999e-8	0.1000000000000000e-7	0.1000000015860604e-7
7	0.2000000000000001e-7	0.1999999999999998e-7	0.1999999980167443e-7
8	0.2999999999999999e-7	0.3000000000000002e-7	0.300000000764256e-7
誤差	10^{-40}	10^{-25}	10^{-17}

例 2.50 次のチェビシェフの多項式 $T_{50}(x)$ を考える。

$$f(x) \quad = \quad T_{50}(x) = 0$$

$f(x) = 0$ は-1 から$+1$ の範囲に解を持ち両端で近接根になっている。したがって$\alpha = 1, \epsilon = \frac{1}{10}$とし、この範囲にある近接根を分離する。この例は近接根以外の根が近接根に非常に近い場合を表している。$f(x)$ に分数変換 (変換 1) を適用したもの $h(u)$ を、i 回擬局所化を適用したもの $g_i(u)$ をとする。各解は元の方程式の解へ変換したもので実部のみ示した。虚部は 10^{-30}程度でほぼ 0 と見なせる。また真の解は 0.9995065603657316 , 0.9955619646030800 , 0.9876883405951377 , 0.9759167619387474 , 0.9602936856769431 , 0.9408807689542255 , 0.9177546256839811 である。

$h(u)$	$g_{10}(u)$	$g_{20}(u)$	$g_{25}(u)$
0.9995065603657316	0.9995065603657316	0.9995065684387976	0.9997116722154092
0.9955619646030800	0.9955619646030800	0.9955619577276302	0.9953481236931984
0.9876883405951377	0.9876883405951377	0.9876883413839018	0.9877279255957727
0.9759167619387474	0.9759167619387474	0.9759167619262864	0.9759155042743626
0.9602936856769431	0.9602936856769431	0.9602936856769555	0.9602936895876784
0.9408807689542255	0.9408807689542255	0.9408807689542255	0.9408807689540377
0.9177546256839811	0.9177546256839811	0.9177546256839811	0.9177546256839811

次に $f(x)$ に分数変換 (変換 3) を適用する。範囲外の近似解として$\beta_l = -1$(5 回), -0.9(5 回), -0.8(5 回), -0.7(5 回), -0.6(5 回) を与える。

$h(u)$	$g_{10}(u)$	$g_{20}(u)$	$g_{25}(u)$
0.9995065603657316	0.9995065603657316	0.9995065603657316	0.9995065607397773
0.9955619646030800	0.9955619646030800	0.9955619646030800	0.9955619642321532
0.9876883405951377	0.9876883405951377	0.9876883405951377	0.987688340654307
0.9759167619387474	0.9759167619387474	0.9759167619387474	0.9759167619370948
0.9602936856769431	0.9602936856769431	0.9602936856769431	0.9602936856769473
0.9408807689542255	0.9408807689542255	0.9408807689542255	0.9408807689542255
0.9177546256839811	0.9177546256839811	0.9177546256839811	0.9177546256839811

例 3. 近接根ではないが次のような方程式を考える。

$$f(x) = \prod_{i=1}^{20}(x - i)$$

この方程式を解くために$\alpha = 10.1, \epsilon = 11$ とする。

$f(x)$ に分数変換 (変換 1) を適用したもの $h(u)$ とし、この方程式を解くと次のようになる。各解は元の方程式の解へ変換したもので実部のみ示した。虚部は 10^{-30}程度でほぼ 0 と見なせる。

No.	元の問題の数値解	No.	元の問題の数値解
1	1.000000000000000	11	11.00000000000000
2	1.999999999999990	12	12.00000000000005
3	3.000000000000006	13	12.99999999999858
4	3.999999999999992	14	14.00000000000572
5	5.000000000000000	15	14.99999999994579
6	5.999999999999999	16	16.00000000010763
7	7.000000000000000	17	16.99999999952611
8	8.000000000000000	18	18.00000000004319
9	9.000000000000000	19	18.99999999966187
10	10.00000000000000	20	20.00000000005503

参考文献

1) H. Kobayashi & H. Suzuki. : **The multiplicity of a solution of a system of algebraic equations**,Proc. of the 1992 International Workshop on Mathematics Mechanization, pp 53-64.

2) H. Kobayashi , H. Suzuki & Y. Sakai. : **The multiplicity of a solution of a system of algebraic equations II**,Proc. of the 1994 Winter Workshop on Computer Algebra , pp 11-15.

3) 小林, 鈴木, 酒井 : **分数変換による近接根の分離について** , 数式処理 vol.2 no.2 pp.2-7 (1993)